Martin Beránek, 1.F, X–11

XIX. Volný pád ve viskózní kapalině

TEORIE: V této úloze je za úkol změřit dynamickou viskozitu ricínového a parafínového oleje. Měření se provádí Stokesovou metodou, kdy viskozitu určím ze známých parametrů malé kuličky a ze znalosti ustálené rychlosti, kterou klesá zkoumanou kapalinou. Protože jde o kuličky malých rozměrů a malé rychlosti, použiji Stokesův vztah pro odpor prostředí kladený pohybujícímu se tělesu kulového tvaru

$$F_\mathrm{o} = 6\pi\eta r v\,, \tag{1}$$

kde r je poloměr kuličky, v rychlost, kterou se pohybuje, ν dynamická viskozita kapaliny a F_o odporová síla, která na ni působí. Tento vztah platí pouze přibližně, nicméně pokud je splněna podmínka $\mathrm{Re} \ll 1$, bude chyba způsobená jeho použitím vzhledem k ostatním nepřesnostem zanedbatelně malá. Platnost tohoto předpokladu lze zpětně velmi jednoduše ověřit ze vztahu

$$\mathrm{Re} = \frac{lv\rho}{\eta}\,, \tag{2}$$

kde l je charakteristický rozměr kuličky (vzhledem k tomu, že potřebuji znát Re pouze řádově, je jedno, jaký rozměr použiji a dále budu brát průměr), v rychlost jejího pohybu a ρ hustota okolní kapaliny.

Na kuličku působí navíc ještě tíhová síla a vztlak kapaliny. Pohyb je už po krátké době (a po celou měřenou dráhu) téměř rovnoměrný, takže mohu počítat, že výsledná síla působící na kuličku je nulová. Tedy

$$F_\mathrm{o} + F_\mathrm{vz} = F_\mathrm{g}\,. \tag{3}$$

Budu měřit průměr d a hustotu ρ_k kuličky, takže si vyjádřím

$$m = \frac{1}{6}\,\pi\rho_\mathrm{k} d^3 \tag{4}$$

a dosadím do (3)

$$\begin{aligned} 3\pi\eta d v + \frac{1}{6}\,\pi\rho g d^3 &= \frac{1}{6}\,\pi\rho_\mathrm{k} g d^3\,,\\ 3\pi\eta d v &= \frac{1}{6}\,\pi g d^3\left(\rho_\mathrm{k} - \rho\right)\,,\\ \eta &= \frac{g d^2\left(\rho_\mathrm{k} - \rho\right)}{18 v}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Protože měřím dobu t, za kterou kulička urazí dráhu l, dosadím do (5) za rychlost $v = l/t$.

$$\eta = \frac{g\left(\rho_\mathrm{k} - \rho\right)}{18 l}\,d^2 t\,. \tag{6}$$

Pikonometrická metoda měření hustoty. Zjistím hmotnost pikonometru naplněného tekutinou o známé hustotě (vodou), hmotnost určitého množství zkoumaných tělísek a nakonec hmotnost pikonometru s těmito tělísky doplněného vodou. Označím si V objem pikonometru, V_T objem tělísek, ρ hustotu vody a ρ_T hustotu tělísek. Změřené hmotnosti postupně m_1, m_2 a m_3. Pak platí

$$m_1 = V\rho, \qquad m_2 = V_\mathrm{T}\rho_\mathrm{T} \qquad \text{a} \qquad m_3 = V_\mathrm{T}\rho_\mathrm{T} + (V - V_\mathrm{T})\rho\,;$$

$$\begin{aligned} m_3 &= m_2 + m_1 - V_\mathrm{T}\rho\,,\\ m_3 &= m_2 + m_1 - m_2\frac{\rho}{\rho_\mathrm{T}}\,,\\ \rho_\mathrm{T} &= \frac{m_2\rho}{m_1 + m_2 - m_3}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

MĚŘENÍ: Nejprve jsem určoval parametry kuliček. Podařilo se mi je rozdělit na dva druhy. Větší budu značit A a menší B. Průměr jsem měřil pomocí dílenského mikroskopu, který měl stupnice kalibrované po 10 μm, ale samotné nastavení zaměřovacího kříže na okraj kuličky bylo nepřesné a navíc měřím dvě polohy a počítám jejich rozdíl, takže celkovou chybu měřidla odhaduji na hodnotu $\pm 20\,\mu$m.

- Naměřené hodnoty pro A:

$\mathbf{x_1}$ [mm]	$\mathbf{x_2}$ [mm]	$\mathbf{d}$ [mm]	$\mathbf{\Delta d}$ [mm]	$(\mathbf{\Delta d})^2$
7,97	10,75	2,78	0,008	$5{,}63 \cdot 10^{-5}$
17,52	20,26	2,74	−0,032	$1{,}06 \cdot 10^{-3}$
14,61	17,39	2,78	0,008	$5{,}63 \cdot 10^{-5}$
19,38	22,15	2,77	−0,003	$6{,}25 \cdot 10^{-6}$
22,21	25,02	2,81	0,037	$1{,}41 \cdot 10^{-3}$
23,98	26,84	2,86	0,087	$7{,}66 \cdot 10^{-3}$
19,92	22,55	2,63	−0,143	$2{,}03 \cdot 10^{-2}$
16,82	19,63	2,81	0,037	$1{,}41 \cdot 10^{-3}$

Střední hodnota

$$\tilde{d} = 2{,}7725\,\mathrm{mm}\,,$$

odhad disperze

$$\left(\tilde{\sigma}^2\right)^\star = 4{,}56 \cdot 10^{-3} \qquad \text{a} \qquad \tilde{\sigma}^2_{\mathrm{odh}} = 4{,}44 \cdot 10^{-5}\,.$$

Tedy $3\sigma = 0{,}203$ a vidím, že mezi naměřenými hodnotami není žádná hrubá chyba.

$$d = (2{,}77 \pm 0{,}07)\,\mathrm{mm}\,.$$

- Hodnoty pro B:

$\mathbf{x_1}$ [mm]	$\mathbf{x_2}$ [mm]	$\mathbf{d}$ [mm]	$\mathbf{\Delta d}$ [mm]	$(\mathbf{\Delta d})^2$
10,92	12,34	1,42	0,154	$2{,}372 \cdot 10^{-2}$
14,98	16,37	1,39	0,124	$1{,}538 \cdot 10^{-2}$
14,10	15,35	1,25	−0,016	$2{,}560 \cdot 10^{-4}$
15,24	16,53	1,29	0,024	$5{,}760 \cdot 10^{-4}$
5,72	6,90	1,18	−0,086	$7{,}396 \cdot 10^{-3}$
10,02	11,23	1,21	−0,056	$3{,}136 \cdot 10^{-3}$
3,68	4,86	1,18	−0,086	$7{,}396 \cdot 10^{-3}$
8,43	9,75	1,32	0,054	$2{,}916 \cdot 10^{-3}$
4,32	5,44	1,12	−0,146	$2{,}132 \cdot 10^{-2}$
5,12	6,42	1,30	0,034	$1{,}156 \cdot 10^{-3}$

Střední hodnota

$$\tilde{d} = 1{,}266\,\mathrm{mm}\,,$$

odhad disperze

$$\left(\tilde{\sigma}^2\right)^\star = 9{,}25 \cdot 10^{-3} \qquad \text{a} \qquad \tilde{\sigma}^2_{\mathrm{odh}} = 4{,}44 \cdot 10^{-5}\,.$$

Tedy $3\sigma = 0{,}289$ a opět není žádná hodnota hrubou chybou.

$$d = (1{,}266 \pm 0{,}096)\,\mathrm{mm}\,.$$

Hustotu kuliček jsem určoval pikonometrickou metodou. Naměřené hodnoty pro dva různé pikonometry. Chybu měření odhaduji na $\pm 40\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ – v tom je zahrnuta jak nepřesnost vážení a nepřesnost určení hustoty vody, tak také alespoň odhadem to, že pikonometr byl pokaždé naplněn na trochu jiný objem. Na přesné spočítání statistické chyby mám málo naměřených hodnot, takže tento odhad budu považovat za celkovou chybu výsledku.

$\mathbf{m_1}$ [g]	$\mathbf{m_2}$ [g]	$\mathbf{m_3}$ [g]	$\rho\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$	$\rho_\mathrm{k}\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$
11,7320	0,5839	12,0941	998	2627,3
28,3614	1,8946	29,5473	998	2668,0

Výsledná hustota kuliček je tedy

$$\rho_\mathrm{k} = (2650 \pm 40)\,\mathrm{kg\,m^{-3}}.$$

Hustotu parafinového a ricinového oleje a tíhové zrychlení určím z tabulek.

- parafinový olej – $\rho_\mathrm{p} = (800 \pm 5)\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
- ricinový olej – $\rho_\mathrm{r} = (950 \pm 5)\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
- tíhové zrychlení – $g = (9{,}8100 \pm 0{,}0005)\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Pád kuliček v parafinovém oleji.
Měřil jsem, za jak dlouho kulička urazí dráhu o délce $l = (25{,}8 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$.

- Kuličky A. Doba pádu byla mezi dvěma a třemi sekundami. To odpovídá viskozitě v řádu $10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$ a Reynoldsovu číslu v řádu jednotek. Podmínka použitelnosti Stokesova vzorce tedy splněna není.
- Kuličky B. Zde se doby pádu pohybovaly kolem deseti sekund, takže už mohu tento vztah použít, aniž bych se dopustil příliš velkých chyb (Reynoldsovo číslo je v řádu 10^{-1}). Naměřené časy (chybu měření odhaduji na 0,5 s, hlavně vlivem reakční doby při zastavování stopek):

$\mathbf{t}$ [s]	$\mathbf{\Delta t}$ [s]	$(\mathbf{\Delta t})^\mathbf{2}$
10,18	0,684	0,468
9,35	−0,146	0,021
8,19	−1,306	1,706
8,92	−0,576	0,332
8,50	−0,996	0,992
9,24	−0,256	0,066
10,12	0,624	0,389
9,10	−0,396	0,157
11,91	2,414	5,827
9,45	−0,046	0,002

Střední hodnota

$$\tilde{t} = 9{,}496\,\mathrm{s},$$

odhad disperze

$$(\tilde{\sigma}^2)^\star = 1{,}1 \qquad \text{a} \qquad \tilde{\sigma}^2_\mathrm{odh} = 0{,}028\,.$$

Opět není žádná hodnota změřena s chybou větší než 3σ.

$$t_2 = (9{,}5 \pm 1{,}1)\,\mathrm{s}.$$

Pád kuliček v ricinovém oleji.
Měřil jsem, za jak dlouho kulička urazí dráhu o délce $l = (20{,}5 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$.

- Kuličky A. Reynoldsovo číslo je tu v řádu 10^{-2}, takže mohu Stokesův vzorec bez problémů použít. Naměřil jsem následujících osm hodnot časů (o chybě platí to, co bylo napsáno výše):

$\mathbf{t}$ [s]	$\mathbf{\Delta t}$ [s]	$(\mathbf{\Delta t})^\mathbf{2}$
26,98	−0,896	0,803
26,17	−1,706	2,911
25,11	−2,766	7,652
28,58	0,704	0,495
26,26	−1,616	2,612
28,24	0,364	0,132
30,02	2,144	4,596
31,65	3,774	14,241

Střední hodnota

$$\tilde{t} = 27{,}876\,\mathrm{s}\,,$$

odhad disperze

$$\left(\tilde{\sigma}^2\right)^\star = 4{,}78 \qquad \text{a} \qquad \tilde{\sigma}^2_{\mathrm{odh}} = 0{,}028\,.$$

Žádná hodnota není změřena s chybou větší než 3σ, takže

$$t_3 = (28 \pm 2)\,\mathrm{s}\,.$$

- Kuličky B. Platnost Stokesova vztahu je zde zcela bez problémů, ale kuličky padaly přibližně dvě minuty, takže mám pro tento případ méně naměřených hodnot.

$\mathbf{t}$ [s]	$\mathbf{\Delta t}$ [s]	$(\mathbf{\Delta t})^2$
107,67	−5,360	28,730
103,21	−9,820	96,432
113,96	0,930	0,865
127,28	14,250	203,063

Střední hodnota

$$\tilde{t} = 113{,}03\,\mathrm{s}\,,$$

disperze

$$\left(\tilde{\sigma}^2\right)^\star = 109{,}7 \qquad \text{a} \qquad \tilde{\sigma}^2_{\mathrm{odh}} = 0{,}028\,.$$

Mez jistoty $3\sigma = 31{,}42$, takže

$$t_4 = (110 \pm 10)\,\mathrm{s}\,.$$

Výsledné hodnoty dynamické viskozity teď už mohu z výše uvedených hodnot spočítat podle vzorce (6). Celkovou chybu výsledku určím jako (odmocněný) součet čtverců chyb jednotlivých veličin.

- Parafinový olej. Zde mám k dispozici pouze údaje z pohybu kuliček B.

$$\rho_{\mathrm{k}} = (2650 \pm 40)\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \qquad l = (0{,}258 \pm 0{,}001)\,\mathrm{m}$$
$$\rho = (800 \pm 5)\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \qquad d = (1{,}266 \pm 0{,}096)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$
$$g = (9{,}8100 \pm 0{,}0005)\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad t_2 = (9{,}5 \pm 1{,}1)\,\mathrm{s}$$

Relativní chyby:

$$(\eta_{\rho_{\mathrm{k}}-\rho})^2 = \left(\frac{40{,}3}{1850}\right)^2 = 0{,}000475 \qquad (\eta_d)^2 = \left(\frac{0{,}096}{1{,}266}\right)^2 = 0{,}005750$$
$$(\eta_l)^2 = \left(\frac{0{,}001}{0{,}258}\right) = 0{,}000015 \qquad (\eta_{t_2})^2 = \left(\frac{1{,}1}{9{,}5}\right)^2 = 0{,}013407$$

Celková chyba

$$\eta_\eta = 0{,}16$$

a výsledná viskozita parafinového oleje

$$\underline{\underline{\eta = (5{,}95 \pm 0{,}95)\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}}}\,.$$

- Ricinový olej a kuličky B. Oproti předchozímu případu se liší čas, hustota oleje a dráha na které se měřil pohyb kuličky.

$$\rho = (950 \pm 5)\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$$
$$l = (0{,}205 \pm 0{,}001)\,\mathrm{m}$$
$$t_4 = (110 \pm 10)\,\mathrm{s}$$

Odpovídající relativní chyby

$$\eta_{\rho_\mathrm{k}-\rho}{}^2 = \left(\frac{40{,}3}{1850}\right)^2 = 0{,}000562$$
$$\eta_l{}^2 = \left(\frac{0{,}001}{0{,}205}\right) = 0{,}000024$$
$$\eta_{t_2}{}^2 = \left(\frac{10}{110}\right)^2 = 0{,}008264$$

Celková chyba

$$\eta_\eta = 0{,}14$$

a výsledná viskozita ricinového oleje

$$\underline{\underline{\eta = (0{,}8 \pm 0{,}1)\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}}}.$$

- Ricinový olej a kuličky A. Zde se liší pouze čas a průměr kuliček.

$$d = (2{,}77 \pm 0{,}07)\,\mathrm{mm}$$
$$t_3 = (28 \pm 2)\,\mathrm{s}$$

A relativní chyby

$$\eta_d{}^2 = \left(\frac{0{,}07}{2{,}77}\right)^2 = 0{,}000639$$
$$\eta_{t_2}{}^2 = \left(\frac{2}{28}\right)^2 = 0{,}005102$$

Celková chyba

$$\eta_\eta = 0{,}083$$

a výsledná viskozita ricinového oleje

$$\underline{\underline{\eta = (0{,}97 \pm 0{,}08)\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}}}.$$

ZÁVĚR: S nejmenší chybou jsme viskozitu naměřil při padání větších kuliček ricinovým olejem. Malé kuličky sice padají pomalu, což je dobře, ale jejich tvar má ke kouli dost daleko, takže je za prvé větší chyba při určování průměru a hlavně se při pohybu kapalinou chová každá jinak v závislosti na svém skutečném tvaru a vyjde i větší rozptyl při určování času. Také je pak potřeba uvažovat nad tím, nakolik ještě platí Stokesův vztah pro kouli. Je dost pravděpodobné, že se při měření pohybu malých kuliček objevili ještě nějaké další chyby dané špatným fyzikálním modelem, které zde nemám započítané.

Při pohybu malých kuliček parafínovým olejem se navíc mohlo projevit také to, že Reynoldsovo číslo je dost vysoké a přesnost Stokesova vztahu se opět snižuje.

Když získané výsledky porovnám s tabulkovými hodnotami, zjistím, že údaj pro kuličky A padající ricinovým olejem odpovídá velmi dobře. Údaj pro kuličky Bse ale do tabulkové hodnoty v mezích chyby nedostane. To může být způsobeno právě výše zmiňovaným problémem se špatným modelem. Obdobná je situace u kuliček Bpadajících glycerinovým olejem. V obou případech vyšla viskozita nižší, tedy chtěl bych, aby kuličky padaly pomaleji. Rychlejší pád může být způsoben právě tím, že se „kulička“ (která má ovšem ke kulatosti dost daleko) natočí tak, že průřez kolmý na směr rychlosti je menší, než mnou změřené d^2.