Martin Beránek, 2.F, X–11

Úloha 7 – Měření indukčnosti a kapacity

Pracovní úkol:

1. Změřte závislost indukčnosti cívky na procházejícím proudu pro tyto případy:
   (a) cívka bez jádra
   (b) cívka s otevřeným jádrem
   (c) cívka s uzavřeným jádrem
2. Přímou metodou změřte odpor cívky a určete její kvalitu.
3. Změřte velikost kapacit kondenzátorů z kapacitní dekády.
4. Odhadněte přesnost měření.

Teorie:

Reálná cívka se v obvodu chová jako sériově spojený odpor a dokonalá indukčnost. Pokud cívkou protéká střídavý proud o úhlové frekvenci ω s průběhem

$$i_L^\star = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_1)}\,, \tag{1}$$

bude na ní střídavé napětí

$$u^\star = (\mathrm{j}\,\omega L + R)\, i_L^\star\,, \tag{2}$$

kde L je indukčnost cívky a R její vnitřní odpor. Napětí na cívce měřím paralelně připojeným voltmetrem s vnitřním odporem R_V. Předřazený ampérmetr tedy měří součet proudu procházejícího voltmetrem a cívkou. Pro proud voltmetrem platí

$$i_\mathrm{V}^\star = \frac{u^\star}{R_\mathrm{V}}\,. \tag{3}$$

Proud voltmetrem, který je ve fázi s napětím se od proudu cívkou odchyluje o fázový rozdíl φ. Velikost napětí na cívce a voltmetru je U. Toto napětí je vidět na stupnici voltmetru. (V dalším textu neuvažuji fakt, že přístroje neukazují amplitudy napětí a proudu, ale jejich efektivní hodnoty. Ve výsledku se vyskytují pouze poměry těchto veličin, takže rozdíl mezi amplitudou a efektivní hodnotou není podstatný – za předpokladu harmonických proudů a napětí.) Velikost proudu cívkou je I_L. Z toho mohu určit kosinus úhlu φ

$$\cos\varphi = \frac{RI_L}{U}\,. \tag{4}$$

Velikost proudu tekoucího voltmetrem je

$$I_\mathrm{V} = \frac{U}{R_\mathrm{V}}\,. \tag{5}$$

Podle kosinové věty jej vektorově sečtu s proudem I_L a vyjde celkový proud ampérmetrem

$$I^2 = I_L^2 + I_\mathrm{V}^2 + 2I_L I_\mathrm{V}\cos\varphi\,, \qquad I^2 = \frac{U^2}{R_\mathrm{V}^2} + \left(\frac{2R}{R_\mathrm{V}}+1\right) I_L^2\,. \tag{6}$$

Po dosazení velikosti proudu tekoucího cívkou podle (2) vyjde výraz

$$I^2 = \frac{U^2}{R_\mathrm{V}^2} + \left(\frac{2R}{R_\mathrm{V}}+1\right)\frac{U^2}{R^2+\omega^2L^2}\,. \tag{7}$$

Z toho vyjádřím L jako

$$L = \frac{\sqrt{\frac{U^2}{I^2}\left(\frac{R}{R_\mathrm{V}}+1\right)^2 - R^2}}{\omega\sqrt{1-\frac{U^2}{I^2R_\mathrm{V}^2}}}\,. \tag{8}$$

Vnitřní odpor voltmetru je o několik řádů vyšší, než ohmický odpor vinutí cívky a chyba podílu U^2/I^2 je při prováděném měření minimálně v řádu procent. Podíl R/R_V mohu tedy vůči jedničce zanedbat a vztah (8) přejde na tvar

$$L = \frac{\sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2}}{\omega\sqrt{1 - \frac{U^2}{I^2 R_\mathrm{V}^2}}}\,. \tag{9}$$

Pokud se odmocnina ve jmenovateli liší od jedničky řádově méně než jaká je chyba měření, mohu ji také zanedbat. Tato situace nastane pokud je impedance cívky mnohem menší než vnitřní odpor voltmetru. Místo vztahu (9) pak mohu psát

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2}\,. \tag{10}$$

Ohmický odpor cívky opět zjistím přímým měřením, ale tentokrát se stejnosměrným proudem. Velikost odporu cívky je řádově tisíckrát menší než velikost vnitřního odporu voltmetru, takže s přihlédnutím k chybě měření není potřeba započítávat žádné korekce a platí

$$R = \frac{U}{I}\,, \tag{11}$$

kde U a I jsou hodnoty stejnosměrného napětí a proudu ukázané měřícími přístroji.

To jak se reálná cívka liší od ideální ukazuje její kvalita $Q = \mathrm{tg}\,\varphi$. Fázový rozdíl mezi proudem cívkou a napětím na ní se určí z její komplexní impedance. Konkrétně

$$Q = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L}{R}\,, \tag{12}$$

kde L je indukčnost a R ohmický odpor cívky.

Reálný kondenzátor se chová jako paralelně zapojená ideální kapacita C a odpor R. To je způsobeno nenulovou vodivostí dielektrika v kondenzátoru. Na rozdíl od cívky diskutované výše je zde odpor R většinou v řádu megaohmů.

Pro proud tekoucí kondenzátorem, na jehož svorkách je harmonické napětí $u^\star$ o frekvenci ω platí

$$i^\star = (\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R})u^\star\,. \tag{13}$$

Pokud zapojím voltmetr přímo ke kondenzátoru a ampérmetr až před něj, získám paralelní spojení kapacity C, odporu R a vnitřního odporu voltmetru R_V. Upravený vztah (13) vypadá následovně

$$i^\star = (\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_\mathrm{V}})u^\star\,. \tag{14}$$

Velikost napětí a proudu U a I ukazují měřící přístroje. Vztah pro kapacitu odvozený z (14) je

$$C = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{I^2}{U^2} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_\mathrm{V}}\right)^2}\,. \tag{15}$$

Odpor kondenzátoru je řádově vyšší než vnitřní odpor voltmetru, takže podíl $1/R$ je možné zanedbat

$$C = \frac{I}{\omega U}\sqrt{1 - \frac{U^2}{I^2 R_\mathrm{V}^2}}\,. \tag{16}$$

Při menších hodnotách kapacity se už odmocnina liší podstatně od jedné a kromě nutnosti započítání korekce by také byla přesnost výsledku ovlivněna přesností, se kterou znám odpor R_V. V tomto případě je možné zapojit ampérmetr ihned ke kondenzátoru a voltmetr až přes něj. Mám tedy paralelně spojený odpor a kapacitu a k tomu sériově připojený odpor R_A (vnitřní odpor ampérmetru). Situace je analogická předchozímu případu s cívkou. Napětí naměřené voltmetrem U je (vektorovým) součtem napětí na kondenzátoru U_C a napětí na ampérmetru U_A. Tyto dva fázory jsou posunuty o úhel φ daný vlastnostmi kondenzátoru. Platí

$$\cos\varphi = \frac{U_C}{IR}\,. \tag{17}$$

Opět podle kosinové věty a po dosazení za úhel φ ze vztahu (17)

$$U^2 = U_C^2 + U_\mathrm{A}^2 + 2U_C^2\,\frac{R_\mathrm{A}}{R} = \left(1 + \frac{2R_\mathrm{A}}{R}\right) U_C^2 + U_\mathrm{A}^2\,. \tag{18}$$

Platí $U_\mathrm{A} = IR_\mathrm{A}$ a U_C vyjádřím podle (13). Pak mohu vyjádřit kapacitu kondenzátoru

$$C = \frac{\sqrt{\frac{I^2}{U^2}\left(1 + \frac{R_\mathrm{A}}{R}\right)^2 - \frac{1}{R^2}}}{\omega\sqrt{1 - \frac{I^2}{U^2}\,R_\mathrm{A}^2}}\,. \tag{19}$$

Pokud je podíl R_A/R vzhledem k jedničce zanedbatelný (chyba měření je řádově větší), získám z (19) výraz

$$C = \frac{\sqrt{\frac{I^2}{U^2} - \frac{1}{R^2}}}{\omega\sqrt{1 - \frac{I^2}{U^2}\,R_\mathrm{A}^2}}\,. \tag{20}$$

Pro malé hodnoty kapacity je většinou také $1/R^2$ zanedbatelné vůči podílu I^2/U^2, takže

$$C = \frac{I}{\omega U}\left(1 - \frac{I^2}{U^2}\,R_\mathrm{A}^2\right)^{-1/2}\,. \tag{21}$$

MĚŘENÍ: Nejprve jsem měřil odpor cívky při stejnosměrném proudu. Tento odpor je dostatečně malý, aby při zapojení voltmetru (vnitřní odpor je v řádu kiloohmů) přímo k cívce nebylo potřeba počítat žádnou korekci. Změřené hodnoty jsou v tabulce 1.

U [V]	0,00	1,60	2,90	3,55	4,30	5,20	5,75	6,45	7,60
I [A]	0,0	0,5	1,0	1,3	1,5	1,8	2,0	2,3	2,6

Tabulka 1 – odpor cívky při stejnosměrném proudu

Napětí má být přímo úměrné proudu cívkou a konstantou úměrnosti je hledaný odpor. Po provedení lineární regrese získám hodnotu koeficientu $a = (2{,}87 \pm 0{,}02)\,\Omega$. Statistická chyba je tedy malá a mnohem více se projeví systematická chyba přístrojů. Oba přístroje mají udávanou chybu 1,5% rozsahu, což pro ampérmetr, kde jsem pro měřené hodnoty musel použít spodní část stupnice, znamená chybu asi 4,5% a pro voltmetr asi 2,5%. Výslednou chybu určení odporu tedy odhaduji na 7% a

$$R = (2{,}9 \pm 0{,}2)\,\Omega\,.$$

Dále jsme měřil indukčnost cívky. Opět jsem použil přímou metodu a zjišťoval jsme napětí na cívce a velikost proudu, který jí prochází. Použité střídavé napětí bylo transformováno ze sítě, takže jeho frekvence je 50 Hz a přesnost odhaduji na jedno procento. Úhlová frekvence pak je

$$\omega = (314 \pm 3)\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Voltmetr byl vždy zapojen přímo k cívce a ampérmetr před ním. Změřené hodnoty jsou v tabulkách 2 až 4 (pro různé typy cívky). Ve všech případech je hodnota odmocniny ve jmenovateli vztahu (9) rovna jedné minimálně na čtyři platné cifry, takže indukčnost počítám podle zjednodušeného vztahu (10).

U [V]	1,0	1,4	2,2	3,2	3,8	5,0	6,0	7,5	8,0	10,0
I [A]	0,193	0,268	0,43	0,62	0,72	0,88	1,06	1,40	1,70	1,92
R_V [kΩ]	3	3	3	6	6	6	30	30	30	30
L [mH]	14 ± 2	14 ± 1	13 ± 2	14 ± 2	14 ± 1	16 ± 1	16 ± 3	14 ± 4	12 ± 3	14 ± 3

Tabulka 2 – cívka bez jádra

U [V]	2,0	2,9	4,5	6,0	7,25	10	15	20	25	30
I [A]	0,067	0,096	0,15	0,20	0,23	0,33	0,49	0,65	0,82	0,98
R_V [kΩ]	3	6	6	30	30	30	30	30	120	120
L [mH]	95 ± 9	96 ± 9	95 ± 9	100 ± 20	100 ± 20	100 ± 20	100 ± 10	98 ± 9	100 ± 20	100 ± 10

Tabulka 3 – cívka s otevřeným jádrem

Chyba měření napětí a proudu se mění podle konkrétních měřených hodnot (protože chyba přístroje je udávána vzhledem k rozsahu). Konkrétní hodnota spočítaná podle principu maximální chyby (předpokládám, že většina chyb je systematických) je uvedena v tabulce u výsledné hodnoty. Výsledná hodnota indukčnosti pro cívku bez jádra vychází (spočítaná jako vážený průměr)

$$L_a = (14 \pm 2)\,\mathrm{mH}\,.$$

Hodnoty v tabulce 1 odpovídají tomu, že indukčnost cívky je pro tento rozsah proudů v rámci chyby měření konstantní.

V případě cívky s otevřeným jádrem je statistický rozptyl naměřených hodnot velmi malý a z měření vyplývá, že i cívka s otevřeným jádrem má v měřeném rozsahu proudů konstantní indukčnost. Její hodnota je

$$L_b = (0{,}10 \pm 0{,}01)\,\mathrm{H}\,,$$

kde chyba opět znamená systematickou chybu přístrojů.

U [V]	5,5	7,5	10	20	30	40	50	60	70	80
I [mA]	15,5	18	22	35	47	56	70	84	100	117
R_V [kΩ]	30	30	30	30	120	120	120	120	120	120
L [H]	$1{,}1 \pm 0{,}2$	$1{,}3 \pm 0{,}2$	$1{,}4 \pm 0{,}2$	$1{,}8 \pm 0{,}2$	$2{,}0 \pm 0{,}4$	$2{,}3 \pm 0{,}3$	$2{,}3 \pm 0{,}3$	$2{,}3 \pm 0{,}2$	$2{,}2 \pm 0{,}4$	$2{,}2 \pm 0{,}2$

Tabulka 4 – cívka s uzavřeným jádrem

Indukčnost cívky s uzavřeným jádrem silně závisí na protékajícím proudu a tedy na velikosti magnetického pole v jádře cívky. Při proudu 50 mA a vyšším už dochází k nasycení a permeabilita jádra se dál nemění. Vážený průměr těchto hodnot dává indukčnost cívky s uzavřeným jádrem pro vyšší proudy (takové, při kterých už dojde k nasycení materiálu jádra)

$$L_c = (2{,}2 \pm 0{,}2)\,\mathrm{H}\,.$$

Podle vztahu (12) určím kvalitu jednotlivých variant sestavení cívky (bez jádra, s otevřeným a s uzavřeným jádrem).

$$Q_a = (1{,}5 \pm 0{,}3)\,, \qquad Q_b = (11 \pm 2)\,, \qquad Q_c = (240 \pm 40)\,.$$

Dále jsme měřil kondenzátory z kapacitní dekády. Šest odporů v dekádě budu dále značit čísly od jedné do šesti. Číslem jedna je označen kondenzátor s nejvyšší kapacitou a dále pak podle pořadí na dekádě.

Nejprve hodnoty vodivostního proudu jednotlivými kondenzátory. Měřené proudy jsou řádově jednotky mikroampér, takže z toho plyne velká chyba zjištěných hodnot. Měřil jsem ampérmetrem s vnitřním odporem 2 kΩ, který je vzhledem k odporu kondenzátoru zanedbatelný. Naměřené hodnoty proudů pro jednotlivé odpory dekády jsou v tabulce 5.

U [V]	I_1 [μA]	I_2 [μA]	I_3 [μA]	I_4 [μA]	I_5 [μA]	I_6 [μA]
25	11	14	6	4	2,5	1,5
30	15	20	9	4,5	3	2
40	30	34	14,5	6,5	5	4

Tabulka 5 – vodivostní proud kondenzátory

Chyba měření proudu je $\pm 1\ \mu$A a chyba voltmetru 1,5% rozsahu, což je zde 30 a 120 Voltů. Výslednou hodnotu odporu jsme spočítal jako vážený průměr hodnot pro tři výše uvedená napětí

$$R_1 = (1{,}9 \pm 0{,}2)\,\mathrm{M\Omega}\,, \qquad R_2 = (1{,}5 \pm 0{,}2)\,\mathrm{M\Omega}\,, \qquad R_3 = (3{,}5 \pm 0{,}5)\,\mathrm{M\Omega}\,,$$
$$R_4 = (6 \pm 1)\,\mathrm{M\Omega}\,, \qquad R_5 = (10 \pm 3)\,\mathrm{M\Omega}\,, \qquad R_6 = (15 \pm 5)\,\mathrm{M\Omega}\,.$$

Pro první čtyři kondenzátory jsem měřil s voltmetrem připojeným přímo paralelně ke kondenzátoru. Vnitřní odpor voltmetru je pro použitá napětí v jednotkách až desítkách kiloohmů, takže zanedbání ve vztahu (15) je opodstatněné a kapacitu budu počítat podle (16). Pro poslední dva kondenzátory jsme použil zapojení voltmetru paralelně k sériově spojenému ampérmetru a voltmetru. Vnitřní odpor ampérmetru na použitých rozsazích je řádově stovky Ohmů, takže první zanedbání ve vztahu (19) je opodstatněné. Stejně tak hodnota $1/R^2$ je dostatečně malá, takže pro výpočet kapacity použiji vztah (21).

Naměřené hodnoty pro jednotlivé kondenzátory jsou v tabulkách 6 až 11. Řádek označený X je hodnota odmocniny (korekce) ve vztahu (16) resp. (21). Chyba jednotlivých hodnot kapacity je počítána jako systematická chyba napětí a proudu (oba přístroje mají chybu 2,5% rozsahu) a chyba frekvence.

U [V]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,5
I_1 [mA]	5,10	6,80	8,25	10,0	11,8
R_V [kΩ]	3	6	6	30	30
X_1	0,981	0,995	0,995	1,000	1,000
C_1 [μF]	$5{,}3 \pm 0{,}5$	$5{,}4 \pm 0{,}8$	$5{,}2 \pm 0{,}7$	$5{,}3 \pm 1{,}1$	$5{,}0 \pm 0{,}9$

Tabulka 6 – kondenzátor č. 1 se střídavým proudem

U [V]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,5
I_2 [mA]	2,80	3,45	4,37	5,25	6,5
R_V [kΩ]	3	6	6	30	30
X_2	0,934	0,981	0,982	0,999	0,999
C_2 [μF]	$2{,}8 \pm 0{,}3$	$2{,}7 \pm 0{,}2$	$2{,}7 \pm 0{,}2$	$2{,}8 \pm 0{,}5$	$2{,}8 \pm 0{,}6$

Tabulka 7 – kondenzátor č. 2

U [V]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,5
I_3 [mA]	2,60	3,20	4,05	4,90	5,6
R_V [kΩ]	3	6	6	30	30
X_3	0,923	0,978	0,979	0,999	0,999
C_3 [μF]	$2{,}5 \pm 0{,}4$	$2{,}5 \pm 0{,}3$	$2{,}5 \pm 0{,}3$	$2{,}6 \pm 0{,}5$	$2{,}4 \pm 0{,}4$

Tabulka 8 – kondenzátor č. 3

U [V]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,5
I_4 [mA]	1,70	1,80	2,25	2,70	2,90
R_V [kΩ]	3	6	6	30	30
X_4	0,809	0,929	0,929	0,997	0,996
C_4 [μF]	$1{,}5 \pm 0{,}2$	$1{,}3 \pm 0{,}2$	$1{,}3 \pm 0{,}1$	$1{,}4 \pm 0{,}3$	$1{,}2 \pm 0{,}2$

Tabulka 9 – kondenzátor č. 4

U [V]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,5
I_5 [mA]	0,57	0,76	0,96	1,15	1,45
R_A [Ω]	850	850	850	170	170
X_5	0,987	0,987	0,987	0,999	0,999
C_5 [μF]	$0{,}61 \pm 0{,}07$	$0{,}61 \pm 0{,}05$	$0{,}62 \pm 0{,}04$	$0{,}6 \pm 0{,}2$	$0{,}6 \pm 0{,}1$

Tabulka 10 – kondenzátor č. 5

U [V]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,5
I_6 [mA]	0,56	0,74	0,93	1,12	1,45
R_A [Ω]	850	850	850	170	170
X_6	0,987	0,988	0,987	0,999	0,999
C_6 [μF]	$0{,}60 \pm 0{,}07$	$0{,}60 \pm 0{,}05$	$0{,}60 \pm 0{,}04$	$0{,}6 \pm 0{,}2$	$0{,}6 \pm 0{,}1$

Tabulka 11 – kondenzátor č. 6

Kapacity pro různé hodnoty napětí jsou v rámci chyby stejné, takže výslednou kapacitu spočítám jako vážený průměr hodnot z odpovídající tabulky.

$$C_1 = (5{,}2 \pm 0{,}5)\,\mu\mathrm{F}\,, \qquad C_2 = (2{,}7 \pm 0{,}3)\,\mu\mathrm{F}\,, \qquad C_3 = (2{,}5 \pm 0{,}3)\,\mu\mathrm{F}\,,$$
$$C_4 = (1{,}4 \pm 2)\,\mu\mathrm{F}\,, \qquad C_5 = (0{,}61 \pm 0{,}06)\,\mu\mathrm{F}\,, \qquad C_6 = (0{,}60 \pm 0{,}06)\,\mu\mathrm{F}\,.$$

Diskuze: Chyby měření v této úloze jsou způsobeny hlavně velkými systematickými chybami měřících přístrojů (2,5% rozsahu pro střídavý proud). Protože při všech měřeních zjišťuji pouze poměr napětí a proudu (tedy odpor nebo nějaký ekvivalent elektrického odporu), dalo by se dosáhnout vyšší přesnosti několika způsoby.

Je možné nejprve oba přístroje (voltmetr a ampérmetr) zkalibrovat na nějakých referenčních odporech a zjištěnou korekci pak započítat.

Protože vždy měřím odpor, bylo by také možné použít substituční metodu a jako referenční odpor používat odporovou dekádu, která má přesnost mnohonásobně vyšší než použité přístroje.

Indukčnost cívky bez jádra byla naměřena dle teoretických předpokladů nejnižší a nezávislá na velikosti magnetického pole v cívce. U cívky s feromagnetickým jádrem by se měla projevit závislost permeability jádra na intenzitě pole. Ovšem tento efekt se projeví až při vyšších hodnotách indukce. Při malých hodnotách je tedy magnetická indukce přímo úměrná intenzitě a permeabilita přibližně konstantní. To je vidět na hodnotách pro cívku s otevřeným jádrem. Při uzavření jádra se dosáhne vyšších intenzit pole a projeví se zakřivení magnetizační křivky jádra. Pokud pole vzroste na dostatečně velkou hodnotu, dojde k nasycení a indukce v jádře už dále neroste. To se projeví tím, ze indukčnost cívky zůstává při dalším zvyšování pole (proudu) konstantní, jak je vidět v tabulce 4.

Závěr: Změřil jsem odpor vinutí použité cívky a její indukčnost v případě, kdy je bez jádra, s otevřeným jádrem a s uzavřeným jádrem. Změřené hodnoty jsou uvedeny na straně 4 jako L_a, L_b a L_c. Z hodnoty odporu vinutí a indukčnosti jsem určil kvalitu cívky ve všech třech případech.

Změřil jsme hodnoty kondenzátorů v kapacitní dekádě. Získané hodnoty jsou uvedeny na stránce 6 jako C_n (n je číslo kondenzátoru od jedné do šesti).

Literatura:

[1] R. Bakule, J. Šternberk: Fyzikální praktikum II. SPN, Praha 1989